

Mathématiques. Des outils pour modéliser les marchés financiers

# « La finance est plus com

Alerte. Le célèbre mathématicien Benoît Mandelbrot relance la charge contre les modèles actuels d'analyse des marchés financiers. Et profite de son dernier livre pour faire de nouvelles propositions.

**Accepteriez-vous** d'affronter les courants de l'Atlantique sur un canot qui n'aurait connu que le calme bassin d'Arcachon? Ou avec un coucou qui n'aurait affronté que les turbulences légères du ciel au-dessus d'un aéroclub? De même, voudriez-vous confier trente années d'épargne-retraite à un fonds de pension sous-estimant les risques de krach boursier? Sûrement pas! Et pourtant, l'un des scientifiques français les plus célèbres, le mathématicien Benoît Mandelbrot, accuse les marchés de ne pas disposer des bonnes « souffleries » pour tester la solidité de leurs produits financiers. « *La route suivie par la plupart des théoriciens est mauvaise. Elle conduit à une grave sous-estimation des risques* », écrit-il dans son dernier livre\*, qui critique sévèrement les outils utilisés par les experts.

« *Les modèles orthodoxes sont trop loin de la réalité* », insiste le chercheur. Il n'est d'ailleurs pas le seul à dénoncer leurs bases conceptuelles fragiles... Dans les milieux financiers réputés réactifs, ouverts et efficaces, bien des mythes persistent encore (*lire p. 80*). Depuis qua-

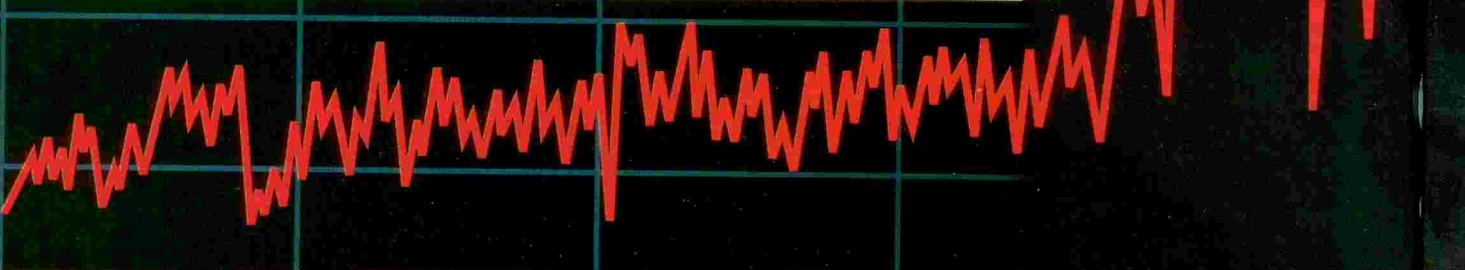
rante ans, malgré les « attaques » et les alternatives proposées par Mandelbrot ou d'autres, la forteresse financière paraît plutôt rétive au changement, arc-boutée sur la défense de méthodes vieilles d'un siècle. C'est au début du XX<sup>e</sup> siècle que le Français Louis Bachelier a défini les bases de l'orthodoxie actuelle : le marché obéit à la loi des probabilités. C'est-à-dire qu'il suit la même loi que le jeu de pile ou face ou de la marche aléatoire. Il faudra tout de même attendre les années 1950 pour que les opérateurs s'emparent de ces idées et élaborent l'arsenal mathématique idoine, toujours en vigueur. Celui-là même qui s'attire les foudres de Benoît Mandelbrot.

Pourquoi chercher à améliorer la modélisation des marchés? Tout simplement parce que si vous ne vous intéressez pas au marché, le marché s'intéresse à vous. Lorsqu'il craque, comme ces dernières années en Argentine, en Russie ou en Extrême-Orient, c'est toute une population qui trinque après la fermeture des entreprises ou les tours de vis budgétaires. Mieux gérer les risques est primordial.

Notamment pour que les banques ou les assurances apprennent à mieux définir la hauteur des « digues », c'est-à-dire des règles qui limitent l'effet des krachs. De même, les retraites, les assurances sociales ou de santé de millions de salariés sont financées par des investissements sur les marchés (sans que les principaux intéressés le sachent d'ailleurs). Bien maîtriser les portefeuilles où sont placées ces sommes colossales passe par de meilleurs modèles pour assurer leur pérennité. Enfin, c'est souvent le marché qui oriente les investissements d'une économie : quel prix fixer pour les licences de téléphonie mobile de troisième génération? Sur quelle start-up parier? Pour éviter les erreurs ou les gaspillages, la sincérité des prix est capitale, ce qui suppose de mieux comprendre comment ils se forment sur le marché.

Petit tour d'horizon des mythes qui continuent de régir les marchés financiers et des tentatives pour les faire disparaître. □

\* *Une approche fractale des marchés*, Editions Odile Jacob.



# « plus complexe que la physique »



## Comprendre le rugueux

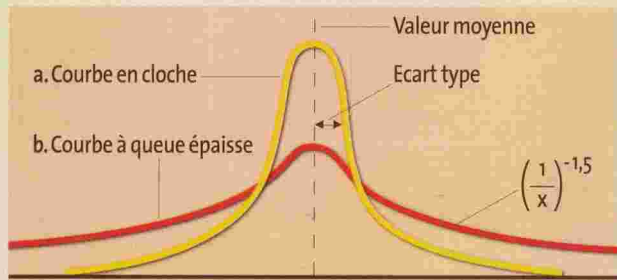
A plus de 80 ans, Benoît Mandelbrot est toujours aussi actif et populaire. Venu recevoir des récompenses mathématiques, en avril, en Pologne, il a rempli les amphes de Varsovie et de Poznan. Et son dernier livre a reçu le prix du *Financial Times* en Allemagne. Nées il y a quarante ans avec l'observation des cours du coton, ses fractales se sont répandues en mathématiques, en physique, en biologie, en ingénierie... pour affronter le délicat problème du « rugueux » ou du « hasard sauvage », c'est-à-dire de tout ce qui n'est pas lisse. Il revient aujourd'hui à la finance en regrettant que le fossé entre les théories et la réalité soit toujours aussi profond.

SERGE PICARD

## MYTHE N° 1

### Les marchés sont des « cloches »

Le modèle standard de la finance explique que les marchés obéissent à une distribution statistique de type gaussienne, autrement appelée courbe en cloche (a). C'est la même qui explique comment sont distribuées les tailles des individus autour de la valeur moyenne, ou les notes d'une classe... A cette aune, l'analyse d'un siècle d'évolution de l'indice boursier new-yorkais, le Dow Jones (de 1916 à 2003), prédit que 58 jours seulement ont des variations supérieures à 3,4 % (en plus ou en moins). Or, en réalité, il y en a eu 1001, rappelle Mandelbrot dans son livre ! Et pour des écarts de 4,5 %, la théorie prévoit 6 jours tandis qu'en réalité il y en a eu 366...



(a) Distribution gaussienne, courbe en cloche : il y a 95 % de chances de se trouver à moins de deux écarts type de la moyenne.

(b) Distribution dominée par les extrêmes, courbe à queue épaisse : la probabilité de gagner dix fois le salaire minimum est 3,2 % =  $(1/x)^{1,5}$ , la majorité des richesses appartient à peu de gens

## MYTHE N° 2

### Moyenne et variance sont les mamelles de la finance

La remise au goût du jour, à la fin des années 1950, des travaux du Français Louis Bachelier a facilité la vie des opérateurs. Avec une statistique gaussienne, deux paramètres suffisent à décrire les cours : la moyenne et la variance. Cette dernière est une mesure de l'écart à la moyenne. C'est-à-dire qu'un prix vaut 100 à plus ou moins 5 (5 est l'écart type et  $5^2$  est alors la variance). Malheureusement moyenne et variance n'ont, pour Mandelbrot, pas grand sens... « Ça fond devant les yeux », aime-t-il à dire. Il y a quarante ans déjà, il montrait que les variânces réelles pouvaient être infinies ! En effet, d'autres lois de distribution, dites à queues épaisses ou en lois de puissance (voir courbe (b) ci-dessus), possèdent cette curieuse propriété mathématique, qui, en outre, décrit mieux la réalité ! *Idem* pour la moyenne. Comment connaître le chiffre d'affaires moyen des sociétés de logiciels aux Etats-Unis ? Difficile vu que, toujours selon Mandelbrot, « chaque étudiant aux Etats-Unis vend du logiciel ». Le nombre de sociétés est donc quasi infini. A l'inverse, enlevez une seule société comme Microsoft et le résultat s'effondre... *Exit* la moyenne...

## MYTHE N° 3

### Les événements extrêmes sont rares

Le 31 août 1998, la Bourse de New York chute de 6,8 %. C'est la troisième chute importante, après -3,5 % le 4 août et -4,4 % une semaine avant. Or, selon le modèle standard, un tel événement n'avait qu'une chance sur 20 millions de se produire (soit une fois en 100 000 ans). Et il n'y avait qu'un risque de 1 sur 500 milliards d'avoir cette série de trois baisses... Faux, explique le mathématicien. En 1997, le Dow Jones a décroché de 7,7 %. Le 19 octobre 1987, c'était bien pire : -29,2 %. C'est encore un effet pervers des courbes en cloche qui sous-estiment les accidents.

## MYTHE N° 4

### Les agents sont rationnels

La *doxa* proclame que les opérateurs agrègent toute l'information reçue, la soupèsent et arbitrent de façon à ajuster parfaitement l'offre à la demande. Les prix reflètent cet équilibre. Hélas ! la réalité trahit des comportements bien différents. Dans un article de *La Recherche* de mai 2003, André Orléan, chercheur au Centre pour la recherche économique et ses applications, à Paris, se plaît à rappeler l'une des plus fameuses illustrations de l'irrationalité de la bulle Internet. Aux Etats-Unis, en 1999, les marchés comparent deux entreprises de vente de jouets. D'un côté, la société Toys«R»Us, 76 millions de dollars de bénéfices pour 11 milliards de chiffre d'affaires dans 1156 magasins. De l'autre, eToys, jeune start-up Internet, avec 28 millions de dollars de pertes pour 30 millions de chiffre d'affaires. En Bourse, la seconde est évaluée à un tiers de plus que la première ! En 2001, elle fait faillite... Où est passée la raison ?

## MYTHE N° 5

### Les marchés sont efficaces

Cette notion dérive de la précédente. Comme les agents sont rationnels, les prix reflètent parfaitement l'information disponible et il est impossible de gagner sur le marché. Du moins à long terme. Ainsi le Dow Jones a crû de 2 % par an en moyenne sur un siècle. Mais 2 % correspondent à peu près, selon Daniel Zajdenweber, de l'université Paris X-Nanterre, aux coûts de transaction. Opération blanche, donc. Pourtant la réalité est plus compliquée. De nombreuses anomalies sont détectées et exploitées sur les marchés pour gagner. Exemple : spéculer est plus profitable en janvier que les autres mois. Ou, au contraire, vendre et acheter les lundis est moins intéressant que le reste de la semaine. Ne rêvez pas, ces effets ne sont plus observés de nos jours... car la martingale ayant été dévoilée, elle ne fonctionne plus. Pendant des années, le mythe de l'efficience a ainsi bel et bien été battu en brèche. Et continue de l'être dans le secret des salles de marché, où chacun est à l'affût de signaux riches de promesses. « Si notre modèle ne marche pas on le publie, sinon on le garde pour nous », est l'adage numéro un en la matière.

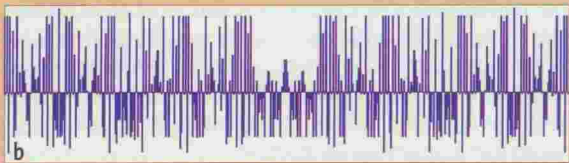
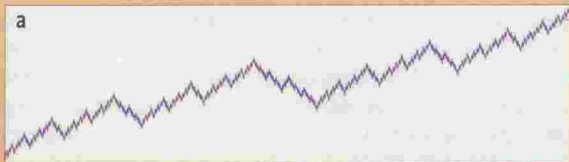
## Une réalité mieux décrite par les fractales

Il se passe chaque jour sur les marchés la même chose que ce qui se passe pendant un mois, une année ou une décennie : des hauts et des bas, des bouffées de turbulence, des bulles ou des krachs... Cette similarité des phénomènes observée sur plusieurs échelles, spatiales ou temporelles, est le propre des figures dites fractales. Benoît Mandelbrot découvre que les marchés du coton sont des fractales en 1962-1963. Il réalise immédiatement que la répartition des cours ne s'ajuste pas sur une courbe en cloche mais selon une loi de puissance. En outre, sur ce marché, les variations peuvent être brutales. Elles arrivent souvent par paquets. Il en tire un nouveau modèle qui permet d'extraire des cours existants les paramètres clés, au-delà des simples variances ou moyennes. Son modèle permet de générer des courbes aléatoires « mimant » le comportement d'un marché et peut prévoir les amplitudes à venir. Souvent, les économistes ne retiendront que les leçons de ce travail (lire « Les leçons de Mandelbrot » p. 82), en délaissant l'outil qui fera le bonheur des physiciens, des ingénieurs ou des biologistes dans de multiples domaines.

En 1997, Mandelbrot revient à ses premières amours et raffine encore son approche dans un article resté l'un des cent plus téléchargés de la base de données publique des articles en sciences sociales. Le fractal devient multifractal. La nouveauté est que même le temps devient fractal, c'est-à-dire irrégulier. Le temps du boursier n'est pas tout à fait le temps de l'horloge. Parfois il semble s'étirer : peu d'actions sont échangées. Ou bien il se contracte : les ordres d'achat et de vente se multiplient. Le premier succès de ce nouveau modèle de Mandelbrot est de bien reproduire l'évolution de la parité dollar/deutschmark, puis celle des actions de Motorola ou de Lockheed. Depuis, l'idée a fait son chemin chez d'autres chercheurs. En 2000-2001, les Français Emmanuel Bacri, Jean Delour et Jean-François Muzy (BDM) proposent un modèle légèrement différent, encore plus fidèle à la réalité. Quelques sociétés privées ont déjà acheté leurs idées...

### 1- Idée fondatrice

Pour générer de la complexité, de petits dessins très simples suffisent. La ligne brisée (1) sert de générateur. A l'étape suivante, ce motif est répété sur chacun des segments (2). Et ainsi de suite. La première courbe (a) représente la fractale ainsi obtenue. La seconde (b) représente les variations à chaque pas. En jouant avec ces idées simples, différents effets sont obtenus (voir ci-contre).



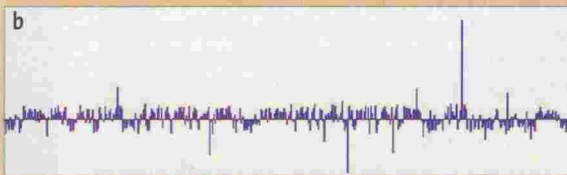
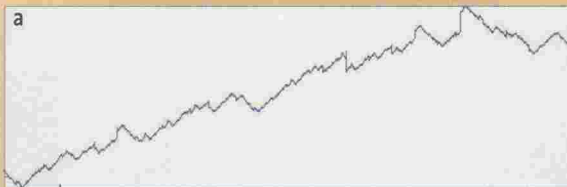
### 2- Du hasard sauvage

En prenant plusieurs générateurs (1), (2) et (3), et en les tirant au hasard à chaque étape, on engendre de l'aléatoire, proche des variations boursières.



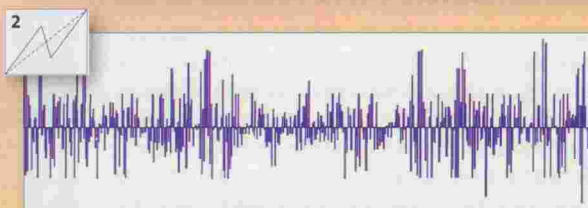
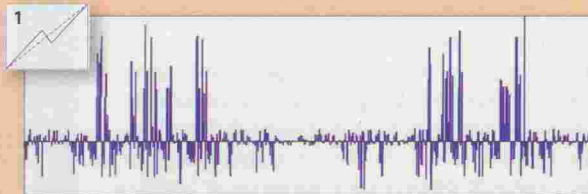
### 3- Des événements extrêmes

Si le générateur (1) ou (2) est discontinu (avec des cassures brutales), les courbes d'évolution (a) ou de variations (b) sont associées à des lois de puissance et présentent aussi des sauts brutaux, analogues à ceux des cours du coton observé par Mandelbrot.



### 4- De la mémoire

En fonction de la « hauteur » de la ligne brisée du générateur (1) ou (2), des effets différents sont obtenus. Dans le premier cas, les variations ont un caractère persistant. Des séries de valeurs positives se maintiennent et sont suivies de séries négatives. Dans le second, au contraire, les fluctuations sont plus sauvages.



## ALTERNATIVE 2

### Continuer de bricoler les vieux modèles

Sur les marchés, plus personne n'avoue croire vraiment aux « mythes ». La réalité est plus complexe. « *Nous ne prenons pas comme argent comptant les modèles gaussiens. Nous en connaissons les limites et savons que c'est une approximation de la réalité*, témoigne Antoine Frachot, directeur des risques chez Sofinco. *Nous ne sommes pas dupes; des événements extrêmes peuvent survenir.* » En fait, les agents s'adaptent. Ils corrigent, ils modifient, ils peaufinent en permanence leurs modèles pour mettre plus de turbulences ici, un peu moins là. Cela donne, par exemple, des modèles

comme ARCH, GARCH ou FIGARCH, qui utilisent des courbes en cloche mais dont la taille varie en fonction de la situation. Pendant la tempête, les cloches s'élargissent; une fois le calme revenu, elles rétrécissent. D'autres modèles abandonnent totalement les lois gaussiennes pour en prendre de plus réalistes comme les lois de puissance adaptées aux moments agités. « *Comme en météo, ce ne sont pas les mêmes modèles qui décrivent une tornade ou qui prédisent la météo quotidienne* », complète Jean-François Boulier, directeur adjoint de la gestion des risques au Crédit Agri-

cole Asset Management. Et ça marche... Jusqu'à un accident du type du krach d'octobre 1987. Alors on répare, et ça repart.

« *Ces modèles sont des usines à gaz. Dans l'un, j'ai compté jusqu'à 37 paramètres avant de m'arrêter* », s'amuse Benoît Mandelbrot, dont les modèles sont plutôt parcimonieux, avec seulement deux ou trois paramètres... « *C'est comme les épicycles de Ptolémée. Ils décrivent bien le mouvement des planètes mais la théorie est fautive à la base* », critique Jean-Philippe Bouchaud, physicien au Commissariat à l'énergie atomique.

## ALTERNATIVE 3

### Du macro au micro

Une autre voie de recherche tient à faire le lien entre les modèles macroscopiques et le monde microscopique des traders, boursicoteurs et autres intervenants du marché. Comment des agents individuels interagissent-ils pour créer de telles courbes de prix, fractales ou pas? La démarche est archi-classique en physique. Exemple : pression et température, facilement mesurables par un observateur, s'expliquent par le mouvement individuel et désordonné des molécules de gaz. L'économie cherche à suivre la même voie et en devient expérimentale. Soit avec des agents virtuels, infatigables puisque numériques, et dotés d'une psychologie et de stratégies rudimentaires mais testables. Soit avec d'authentiques cobayes humains à qui l'on demande de jouer, de s'entendre sur des prix...

Les deux approches permettent de comprendre le rôle du mimétisme, de la méfiance ou de l'excès de confiance, du pessimisme ou de l'optimisme, du rapport aux informations reçues... Certaines bulles s'expliquent ainsi par la propension des agents à imiter leur voisin : chacun pense qu'il trouvera toujours quelqu'un pour racheter plus cher ce qu'il vient d'acheter. D'autres études ont montré que le pessimisme conduit à augmenter les primes de risques.

« *Finalement, les agents ne sont pas irrationnels, ou trop imprévisibles. Ils agissent de façon cohérente bien qu'ils aient chacun des visions différentes* », précise Elyes Jouini, de l'université Paris-Dauphine, récent colauréat du prix du jeune économiste. Les premiers liens entre monde microscopique et macroscopique commencent à germer. Elyes Jouini dispose d'un premier modèle opérationnel prenant en compte l'hétérogénéité des prévisions de chacun des acteurs. Les simulations ne sont pas en reste : Didier Sornette, de l'université de Nice, et Wei-Xing Zhou, de l'université de Shanghai, ont généré, via l'interaction d'agents multiples, des courbes de prix analogues à celles produites par le modèle multifractal BDM.

### Les leçons de Mandelbrot

Il faut observer les données. Comme d'autres ont l'oreille absolue, Mandelbrot possède l'œil absolu, c'est-à-dire l'art de détecter les lois du hasard derrière les courbes les plus torturées.

Les fluctuations sont importantes : autrement dit, ce sont les grands changements qui sont importants, pas les petits.

Les variations arrivent par bouffées : comme les bourrasques de vent, les grandes variations arrivent par rafales et sont suivies de séries beaucoup plus calmes.

### Conclusion

Interpellés par les incohérences mathématiques de leurs classiques outils de gestion, les as de la finance balancent entre petits arrangements et gros chamboulement. Le message de Benoît Mandelbrot est clair : il faut poursuivre la recherche! « *On doit repenser les choses à la base et cesser d'ajouter de petits détails.* » La tâche n'est-elle pas insurmontable? « *La finance est plus compliquée que la physique* », reconnaît le mathématicien. Et Daniel Zajdenweber est encore plus sceptique : « *La finance échappe à la physique. Il n'y a pas de constantes, pas de lois de conservation...* » La finance échappe même peut-être à toute tentative de compréhension. Dès qu'un modèle l'approche, elle biaise et s'en écarte. Les agents s'adaptent, évoluent.

« *Aujourd'hui, dès qu'un nouveau modèle apparaît, nous sommes sûrs que peu de temps après il faudra y poser des rustines, rappelle Antoine Frachot. Contrairement à la physique, nous n'avons jamais le sentiment d'approcher le modèle parfait.* » Un vrai cercle vicieux. D'autant que « *l'intuition des économistes en macroéconomie est trop imprégnée de leurs modèles* », prévient Jean-Philippe Bouchaud. Les mythes de la rationalité, de l'efficacité, du risque zéro... portent plus loin que les salles de marché et se diffusent dans les esprits et les actions même des décideurs. « *Aux armes!* lance Benoît Mandelbrot en conclusion de son ouvrage. *Les modèles ne sont pas simplement faux. Ils sont dangereusement faux.* » L'avertissement n'est plus seulement mathématique, il devient politique. Ce qui promet encore des turbulences sur les marchés.

David Larousserie